Théorème de Riesz-Fischer.

(Bri IV. 8)
(Rud 3.11).

Thm : Soit X espace mesuré, muni d'une mesure positive μ.
$\forall p \in [1,+\infty]$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.

Cas 1 : $p=+\infty$: Soit (f_n) de Cauchy dans $L^\infty(\mu)$.
$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N_k, \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{1}{k}$.
Donc il existe $(E_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ négligeables, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N_k, \forall x \notin E_k, |f_n(x)-f_m(x)| \leq \frac{1}{k}$
Posons $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} E_k$. $\mu(E)=0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N_k, \forall x \notin E, |f_n(x)-f_m(x)| \leq \frac{1}{k}$.
En particulier, $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, donc convergente, de limite $f(x)$.
pour $x \in X \setminus E$.
Par passage à la limite $m \to +\infty$ dans la relation ci-dessus :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_k, \forall x \in X\setminus E, |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Donc $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall x \in X\setminus E, |f(x)| \leq 1 + \|f_{N_1}\|_\infty$, i.e. $f \in L^\infty(\mu)$.
De plus, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_k, \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{k}$, i.e. $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
Donc $L^\infty(\mu)$ est complet.

Cas 2 : $p<\infty$. Soit (f_n) de Cauchy dans $L^p(\mu)$.
Soit (n_k) suite strictement croissante telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall m,n \geq n_k, \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^k}$.
En notant $\tilde{f}_k = f_{n_k}$, $\|\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}$. Posons $g_n = \sum_{k=0}^{n} |\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k|$.
$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \|\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k\|_p \leq 2$ donc par convergence monotone, (g_n) converge ponctuellement presque partout vers g, sur $X\setminus E$, avec $\mu(E)=0$.
De plus, $\int_X |g(x)|^p d\mu = \int_X \liminf_{n\to+\infty} |g_n(x)|^p d\mu \underset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to+\infty} \|g_n\|_p^p \leq 2^p$.
Donc $g \in L^p(\mu)$.
Si $x \in X\setminus E$, $m \geq n$, alors $|\tilde{f}_m(x) - \tilde{f}_n(x)| \leq |\tilde{f}_m(x) - \tilde{f}_{m-1}(x)| + \dots + |\tilde{f}_{n+1}(x) - \tilde{f}_n(x)| = g_{m-1}(x) - g_{n-1}(x)$
Donc $(\tilde{f}_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, donc convergente, de limite $\tilde{f}(x)$.
$\forall m \geq n, \forall x \in X\setminus E, |\tilde{f}_m(x) - \tilde{f}_n(x)| \leq g_{m-1}(x) \leq g(x)$
Donc lorsque $m \to +\infty$, $\forall x \in X\setminus E, |\tilde{f}(x) - \tilde{f}_n(x)| \leq g(x)$
De là, $|\tilde{f}(x)| \leq |g(x)| + |\tilde{f}_1(x)|$, donc $\tilde{f} \in L^p(\mu)$ avec $\|\tilde{f}\|_p \leq \|g\|_p + \|\tilde{f}_1\|_p$.
sur $X\setminus E$.
$\forall x \in X\setminus E$, $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}_n(x)|^p \leq (g(x) - g_{n-1}(x))^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (CVD) $\|\tilde{f} - \tilde{f}_n\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}_n(x)|^p \leq g(x)^p$ avec $g^p \in L^1(\mu)$
(f_n) admet une ss-suite cvgte donc cv.